chapitre: Codimension et dualité

Proposition et définition:

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v, F s.ev de E

1) S, S' deux supplémentaire de F dans E : $E = F \oplus S = F \oplus S'$ alors $S \simeq S'$ (isomorphe)

2) F sera dit de codimension finie dans E s'il admet un supplémentaire S de dim finie

on définit alors la codimension de F dans E par: $\operatorname{codim}_E F = \dim S$

Rq: D'après 1) $\operatorname{codim}_E(F)$ ne dépend pas du choix de S car

$S' \simeq S \Longrightarrow \dim S' = \dim S$

on note aussi $\operatorname{codim}_E(F) = \operatorname{codim}(F)$

Preuve de 1]: soit p le projecteur sur S' parallèlement à F; $u : S \longrightarrow S'$, $x \longmapsto p(x)$

• u linéaire car p l'est

• u inj : soit $s \in \ker u$

$s \in E = F \oplus S'$

$\exists ! (f, s') \in F \times S'$

tq $s = f + s'$

on a $u(s) = 0$

c'à d $s' = 0$

donc $s = f \in S \cap F = \{0\}$

ainsi $s = 0$ donc $\ker u = \{0\}$

d'où u injectif

u surj :

soit $s' \in S' \subset E = F \oplus S$

$\exists ! (f, s) \in F \times S$ tq

$s' = f + s$

$\Rightarrow s = -f + s'$

donc $p(s) = s'$

c'à d $u(s) = s'$

Conclusion : U isomorphisme

donc $S' \simeq S$

Exemple: 1) $E = \mathbb{R}[X]$

$P \in E \setminus \{0\}$

$F = P.\mathbb{R}[X]$ s.e.v de E

par division Euclidienne

on a $\forall A \in \mathbb{R}[X]$

$\exists! Q \in \mathbb{R}[X]$ $\exists! R \in \mathbb{R}[X]$

tq $\begin{cases} A = P.Q + R \\ \deg R < d = \deg P \end{cases}$

c'à d $\mathbb{R}[X] = P\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}_{d-1}[X]$

or $\dim \mathbb{R}_{d-1}[X] = d < \infty$

donc $P\mathbb{R}[X]$ est de codimension finie dans $\mathbb{R}[X]$ et

$\operatorname{codim} P\mathbb{R}[X] = \dim \mathbb{R}_{d-1}[X]$

$= d$

c'à d $\boxed{\operatorname{codim} P\mathbb{R}[X] = \deg P}$

2) $E = M_n(\mathbb{R})$, $H = \{x \in E, \operatorname{Tr}(x) = 0\}$

Mq $\operatorname{codim} H = 1$

$H = \ker Tr$

$\dim H = \dim E - \dim \mathrm{Im}(Tr)$

or $\begin{cases} \mathrm{Im}\, Tr \subset \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}\, Tr \neq \{0\} \text{ car } Tr(I_n) = n \neq 0 \end{cases}$

donc $\dim \mathrm{Im}\, Tr = 1$

donc $\mathrm{codim} H = \dim E - \dim H$

$= \dim \mathrm{Im}\, Tr$

$= 1$

Rq : on peut aussi utiliser les déf équiv d'un hyperplan H :

$\dim H = \dim E - 1 \iff H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Définition d'un hyperplan en dimension quelconque :

H est dit hyperplan de E si $\mathrm{codim} H = 1$

Formule du rang :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$

les p.s.s. équivalentes

1) $\operatorname{rg}(u) < +\infty$

2) $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} u < +\infty$

Dans ce cas :

$$\boxed{\operatorname{codim} \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u}$$

Rq : si $\dim E < +\infty$

alors $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} u < \infty$

(car $\operatorname{Ker} u$ s.e.v de E de dim finie)

la formule du rang devient :

$$\dim E - \dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u$$

Preuve : $1 \Longrightarrow 2$: $r = \operatorname{rg}(u)$ donc

$\exists e_1, \dots, e_r \in E$ tq $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ base de $\operatorname{Im} u$.

Posons $S = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$

Mq $E = \operatorname{Ker} u \oplus S$??

$x \in \ker u \cap S$, $S = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_r)$

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\ u(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} x_i u(e_i) = 0$$

or $(u(e_i))_{1 \le i \le r}$ base de $\mathrm{Im}\, u$ de libre

donc $x_i = 0 \ \forall i$ puis suite $x = 0$.

donc $\boxed{\ker u \cap S = \{0\}}$

Mq $E = \ker u + S$??

Soit $x \in E$, donc

$u(x) \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_i))_{1 \le i \le n}$

$\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u(e_i)$

$u\left(x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i\right) = 0$

donc $x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in \ker u$

$\exists k \in \ker u$ tq $x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = k$

donc $x = k + p$ avec $p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in S$

et $k \in \ker u$ donc $E = \ker u \oplus S$

On conclut que $\ker u$ est de codim finie et $\operatorname{codim} \ker u = \dim S$

où $S = \operatorname{Vect}(e_2, \dots, e_r)$

$\dim S = r$??

il suffit de m.q $(e_2, \dots, e_r)$ libre ?

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u(e_i) = u(0) = 0$$

or $(u(e_i))_{1 \leq i \leq r}$ base de $\operatorname{Im} u$ donc libre

donc $\forall i, \lambda_i = 0$.

d'où $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ libre

donc $\dim S = r$

c'à d $\operatorname{codim} \ker u = r$

$= \operatorname{rang}(u)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

on a $\operatorname{codim} \ker u < \infty$, $\exists S$ de dim finie tq $E = \ker u \oplus S$

soit $f : S \longrightarrow \operatorname{Im} u$, $x \longmapsto u(x)$

f linéaire car u l'est.

$\ker f = \ker u \cap S = \{0\}$, f inj.

f surj :

$y \in \mathrm{Im} u$

$\exists x \in E$ tq $y = u(x)$

on $E = \ker u \oplus S$

$\exists (k, s) \in \ker u \times S$ tq

$x = k + s$

d'où $y = u(x) = u(k) + u(s) = u(s) = f(s)$

donc f est surjective, f isomorphisme

ainsi $S \simeq \mathrm{Im} u$

on $\dim S < \infty$

donc $\mathrm{Im} u$ de dim finie

(ie $\mathrm{rg}(u) < \infty$.

Rq : On déduit de la preuve précédente que si $(u(e_i))_{1 \le i \le r}$ base de $\mathrm{Im} u$ alors

$$E = \ker u \oplus \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

Exemple : $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P(1) = \int_0^1 P(t)\,dt = 0\}$

Montrer $\mathrm{codim} F < \infty$ et donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $u : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$P \longmapsto \left(P(1), \int_0^1 P\right)$$

$$u(\lambda P+\varphi) = \left(\lambda P(1)+\varphi(1), \int_0^1 \lambda P+\varphi\right)$$

$$= \left(\lambda P(1)+\varphi(1), \lambda\int_0^1 P + \int_0^1 \varphi\right)$$

$$= \lambda\left(P(1), \int_0^1 P\right) + \left(\varphi(1), \int_0^1 \varphi\right)$$

$$= \lambda u(P) + u(\varphi)$$

u linéaire donc $F = \ker u$ s.e.v de $\mathbb{R}[X]$

$\mathrm{Im}\, u \subset \mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{rg}\, u < \infty$

par la formule du rg

$\ker u$ est de codim finie

et $\mathrm{codim} \ker u = \mathrm{rg}\, u$

c'à d $\mathrm{codim} F = \mathrm{rg}\, u \leq 2$

or $\begin{cases} u(2) = (1,1) \\ u(X) = (1, \frac{1}{2}) \end{cases}$

et la famille $(1,1)$ $(1,\frac{1}{2})$ libre

donc $\mathrm{rg}\, u \geq 2$ donc $\mathrm{rg}\, u = 2$

et $(u(1), u(X))$ base de $\mathrm{Im}\, u$.

$\mathrm{codim} F = 2$ et $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathrm{Vect}(1, X) = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$

Autre application de la formule du rang :

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

tq x_i sont 2 à 2 $\neq$.

$u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$

$P \longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$

Mq u est surjective ?

- Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$

On a $u(\lambda P + Q) = ((\lambda P+Q)(x_0), \dots, (\lambda P+Q)(x_n))$

$= (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \dots, \lambda P(x_n) + Q(x_n))$

$= \lambda (P(x_0), \dots P(x_n)) + (Q(x_0), \dots Q(x_n))$

$= \lambda u(P) + u(Q)$

Donc u est linéaire

- On a $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{K}^{n+1}$

donc $rg(u) \leq n+1$

D'après le théorème du rang

$$rg(u) = \dim \operatorname{Ker} u$$

Soit $P \in \operatorname{Ker} u$, alors

$P(x_i) = 0 \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$.

$\Leftrightarrow (X - x_i) \mid P \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$

$\Leftrightarrow \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (X - x_i)}_{N} \mid P$ car x_i distincts deux à deux

$\Leftarrow$ $X - x_i$ premiers à deux à deux

donc $\boxed{\operatorname{Ker} u = N \cdot \mathbb{K}[X]}$

$\boxed{\mathbb{K}[X] = N \cdot \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_n[X]}$ (DE)

donc $\dim N\mathbb{K}[X] = n+1$

C/C $rg\, u = \dim \operatorname{Ker} u$

$= n+1$

donc u est surjective

Application : polynôme d'interpolation

on a $\mathbb{K}[X] = N \cdot \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_n[X]$

$= \operatorname{Ker} u \oplus \mathbb{K}_n[X]$

$f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ isomorphisme.

$P \longmapsto u(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n))$

f bijective donc $\forall y \in \mathbb{K}^{n+1}$

$\exists!\ P \in \mathbb{K}_n[X]$ tq $f(P) = y$

ssi $(P(x_0), \dots, P(x_n)) = (y_0, \dots, y_n)$

d'où le

Proposition :

Si $x_i \in \mathbb{K}$ sont 2 à 2 $\neq$ $(0 \leq i \leq n)$

$\exists!\ P \in \mathbb{K}_n[X]$ tq $\forall i,\ P(x_i) = y_i$

P s'appelle le polynôme d'interpolation aux points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$

Calcul de P :

$y = (y_0, \dots, y_n)$

$= \sum_{i=0}^{n} y_i e_i$

$\exists!\ L_i \in \mathbb{K}_n[X],\ e_i = f(L_i)$

donc $y = \sum_{i=0}^{n} y_i f(L_i) = f\left(\sum_{i=0}^{n} y_i L_i\right)$

d'où $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$, **calcul de L_i :**

$e_i = f(L_i) \Leftrightarrow L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$.

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} X - x_j \;\Big|\; L_i \quad , L_i \in \mathbb{K}_n[X] \\ L_i(x_i) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} L_i(X) = c_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} X - x_j \\ L_i(x_i) = 1 \end{cases}$

donc $c_i = \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$

$$\boxed{L_i(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}}$$

$$\boxed{P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)}$$ s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Exemple:

Trouver $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $\begin{cases} P(-1) = 3 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 3 \end{cases}$

$x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

les x_i sont 2 à 2 $\neq$.

$$\begin{cases} y_0 = 3 \\ y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$$P = \sum_{i=0}^{2} y_i L_i$$

$$= \boxed{3L_0 + L_1 + 3L_2}$$

$$L_0 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(X-1)(X-2)}{(-1-1)(-1-2)}$$

$$= \frac{1}{6}(X^2 - 3X + 2)$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}} \quad \times 3$$

$$L_1 = \frac{(X+1)(X-2)}{-2} = -\frac{1}{2}(X^2 - X - 2)$$

$$\boxed{L_1 = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{X}{2} + 1} \quad \times 1$$

$$L_2 = \frac{(X+1)(X-1)}{3} = \boxed{\frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}} \quad \times 3$$

d'où $\boxed{P = X^2 - X + 1}$

Exercice : si $0 \leq k \leq n$

Calculer $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(X)$? $(x_i \text{ 2 à 2 } \neq)$

Notons $y_i = x_i^k \quad 0 \leq i \leq n$

donc $P(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x)$

$= \sum_{i=0}^{n} y_i L(x)$

est le polynôme d'interpolation aux points (x_i, y_i) $0 \leq i \leq n$

Notons $P_2(x) = x^k$

on a $k \leq n$, donc $P_2(x) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$P_2(x_i) = x_i^k = y_i$

par unicité du polynôme d'interpolation $P = P_2$

c'est à dire $\boxed{\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = X^k}$ $0 \leq k \leq n$.

Rq : si f fonction donnée définie sur D

$x_0, \dots, x_n \in D$ (tous $\neq$), $y_i = f(x_i)$

le polynôme d'interpolation aux pts $(x_i, f(x_i))$

s'appelle aussi polynôme d'interpolation de f aux pts $(x_i)_{i=0..n}$

Exemple:

interpoler $f(x) = \sin(\pi x)$

aux points $\begin{cases} x_0 = -1, \quad x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = 0 \\ y_1 = f(x_1) = 0 \\ y_2 = f(x_2) = 1 \end{cases}$$

$$P = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 = L_2 = \frac{(X+1)(X-1)}{-\frac{3}{4}}$$

$$P(X) = \frac{4}{3}(1 - X^2)$$

Exercice: (erreur d'interpolation)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

$x_i \in [a,b]$ 2 à $2 \neq$, $x \in [a,b]$ $0 \leq i \leq n$

P le polynôme d'interpolation de f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$, montrer $\exists\, c_x \in [a,b]$ tq

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} x - x_i$$

Indication : si $x = x_i$ la formule est vraie $\forall c_x$.

Considérer pour $x \in [a,b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=0}^{n} t - x_i$$

avec K choisi tel que $g(x) = 0$

puis th de Rolle

On a $f(x_i) = P(x_i) \Rightarrow g(x_i) = 0 \quad (0 \le i \le n)$

$$g(x) = 0 \iff \boxed{K = \frac{f(x) - P(x)}{\prod_{i=0}^{n} x - x_i}}$$ (le choix de K est possible car $x \neq x_i \ \forall i$)

g admet $n+2$ racines $\neq$.

th de Rolle donne

g' admet $n+2-1$ racines $\neq$

par récurrence

$g^{(k)}$ admet $n+2-k$ racines $\neq$

$n+2-k = 1 \iff k = n+1$.

donc $\exists c_x \in [a,b]$. $g^{(n+1)}(c_x) = 0$

On a $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(n+1)!$

d'où $\boxed{K = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}}$ d'où $f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} x - x_i$.

Exemple : $f(x) = \sin(x)$

P_n interpole f en $(x_i)_{0 \le i \le n}$

Mq $P_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

$$|f^{(n+1)}(c_x)| = |\sin(c_x + (n+1)\tfrac{\pi}{2})| \le 1$$

$$|x - x_i| \le b - a$$

donc $|f(x) - P_n(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

en effet : $\forall x > 0, u_n = \frac{x^n}{n!} \to 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} < 1 \iff n+1 > x \quad (\text{il suffit } n \ge [x])$$

donc :

(u_n) est décroissante minorée par 0 à partir du rang $n \ge [x]$.

de LU on a $L \in \mathbb{R}^+$,

si $L \neq 0$, $\frac{L}{L} = 0$ (càd $1 = 0$ absurde) donc $L = 0$.

Rappel:

H hyperplan si **codim H = 1**.

Proposition

H hyperplan $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tq $H = \ker \varphi$ et $\varphi \neq 0$

$\Leftarrow$ $\varphi : E \to \mathbb{K}$

$\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{K}$ donc $\operatorname{rg}\varphi \leq 1 < \infty$

par la formule du rang

$\operatorname{codim} H = \operatorname{codim} \ker \varphi$

$= \operatorname{rg}\varphi \leq 1$

or $\varphi \neq 0$ donc $\operatorname{rg}\varphi \neq 0$

donc $\operatorname{rg}\varphi = 1$

donc $\operatorname{codim} H = 1$ c'est à dire H hyperplan

$\Rightarrow$ $\operatorname{codim} H = 1$ donc $\exists a \neq 0$ tq

$E = H \oplus \mathbb{K}a$, $\varphi : E \to \mathbb{K}$, $h + \lambda a \mapsto \lambda$

φ linéaire :

$x = h + \lambda a \in E$

$x' = h' + \lambda' a \in E$

$\alpha x + x' = \underbrace{\alpha h + h'}_{\in H} + \underbrace{(\alpha\lambda + \lambda')}_{\in \mathbb{K}} a$

$\varphi(\alpha x + x') = \alpha\lambda + \lambda'$

$= \alpha \varphi(x) + \varphi(x')$

$\varphi(a) = 1 \neq 0$

$(a = 0 + 1.a)$

$x = h + \lambda a$

$x \in \ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$

$\Leftrightarrow x = h$

$\Leftrightarrow x \in H.$

d'où $\ker\varphi = H$.

Exemple : $E = \mathbb{R}[X]$

$H = \{P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P = 0\} = \ker\varphi$

$\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ forme linéaire non nulle
$P \mapsto \int_0^1 P$ $(\varphi(1) = 1 \neq 0)$

en général si $H = \ker \varphi$

pour trouver un supplémentaire de H

on a $\varphi \neq 0 \Rightarrow \exists e_1 \in E$ tq $\varphi(e_1) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi(e_1)$ base de $K = \mathrm{Im}\,\varphi$

$\Rightarrow E = \ker \varphi \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$

$= H \oplus K e_2$.

dans notre cas on a $\varphi(1) \neq 0$

donc $\mathbb{R}[X] = H \oplus K1$.

Autre exemple

$H = \{ x \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(x) = 0 \}$

$M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R} I_n$

(car $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$)

Proposition:

F, G s.e.v de E tq $F \subset G$ tq

$\mathrm{codim} F < \infty$ alors G est aussi de codim finie

et $\mathrm{codim} G \leq \mathrm{codim} F$ avec égalité ssi $F = G$

En effet $f \subset G_n$

$\operatorname{codim} f < \infty \Rightarrow E = f \oplus S$

tq $\dim S < \infty$.

$S \cap G_n$ s.e.v de S, $\dim S < \infty$

$\exists$ s.e.v T de S tq

$$\boxed{S = S \cap G_n \oplus T} \quad (*)$$

donc $E = f \oplus S \cap G_n \oplus T \subset G_n + T$

donc $E = G_n + T$

$G_n \cap T \subset G_n \cap S \cap T$

$\| \quad (S \cap G_n) \cap T = \{0\}$

$E = G_n \oplus T$

$\operatorname{codim} G_n = \dim T \leq \dim S = \operatorname{codim} f < \infty$

avec égalité si $\dim T = \dim S$

$\Leftrightarrow S \cap G_n = \{0\}$ d'après $(*)$

$E = F \oplus T = G_n \oplus T$ avec $f \subset G_n$

donc $\boxed{F = G_n}$